فصل ۱

مقدمات

مانند یک معادلهٔ معمولی که رابطه‌ای میان اعداد و متغیرهاست، یک معادلهٔ دیفرانسیل نیز رابطه ای میان یک تابع و مشتقاتش می باشد. شکل کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل بصورت

$$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = ۰ \qquad (۱)$$

است که y تابعی از x و y' و y'' و . . . مشتقات پیاپی آن بر حسب x هستند. همچنان که در معادلهٔ معمولی بدنبال «عددی» به نام ریشهٔ معادله هستیم که در معادله صدق کند، در معادلهٔ دیفرانسیل نیز بدنبال «تابعی» هستیم که در معادله صدق کند. بنابراین در این نوع معادلات، مهم یافتن تابعی مانند y می باشد که در معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند که این y را **جواب معادله دیفرانسیل** نامیم. از آنجا که یک روش کلی برای حل تمام معادلات دیفرانسیلی وجود ندارد، با بررسی معادلات مختلف و انواع گوناگون آنها در فصول بعدی به حل مسائل می پردازیم. علاوه بر این برخی روشها نیز ترکیبی از روشهای قبلی خواهد بود.

۱.۱ معادلهٔ دیفرانسیل چیست؟

هر معادله که شامل حداقل یکی از مشتقات یک تابع y (اعم از مشتق اول، دوم، سوم،...) باشد را معادلهٔ دیفرانسیل نامیم، مثلاً

$$y' + ۲y = ۴x + ۱$$

$$y - y'' + ۲x = ۴y' + ۳$$

دو معادلهٔ دیفرانسیل محسوب می شوند. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل حتماً باید شامل عبارت مشتق یا عبارت دیفرانسیلی باشد تا معادلهٔ دیفرانسیل بحساب آید. بخاطر داشته باشید که $y' = \frac{dy}{dx}$ مشتق اول، $y'' = \frac{d^۲y}{dx^۲}$ مشتق دوم و . . . و $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ مشتق nـ‌ام هستند. همچنین

ممکن است — مانند فیزیکدانان — از نماد $\dot{y}$ برای مشتق اول و از $\ddot{y}$ بجای مشتق دوم و به همین ترتیب استفاده شود. اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل تنها یک متغیر مستقل داشته باشد، آنرا یک **معادلهٔ دیفرانسیل معمولی** نامند مانند معادلهٔ

$$(\frac{dy}{dx})^۳ + ۴x\frac{d^۲y}{dx^۲} - ۲y\frac{dy}{dx} = ۲xy - ۳$$

و معادله‌ای که دارای مشتقات جزئی (به شکل ∂x و ∂y) با چند متغیر مستقل است را **معادلهٔ دیفرانسیل جزئی** نامند، مانند معادلهٔ

$$\frac{\partial x}{\partial y} = x - ۲y\frac{\partial x}{\partial z}$$

از اینجا به بعد، بحث روی معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل (۱) خواهد که x متغیر مستقل و $y(x)$ متغیر تابع بوده و بجای $y(x)$ تنها به نوشتن y بسنده می کنیم.

۱.۱.۱ مرتبه، درجه و خطی بودن یک معادلهٔ دیفرانسیل

مرتبهٔ یک معادله دیفرانسیل عبارتست از مرتبهٔ بزرگترین مشتق ظاهر شده در معادله. بزرگترین توان برای مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل را درجهٔ معادلهٔ دیفرانسیل نامند و **خطی بودن** معادلهٔ دیفرانسیل به این معناست که معادله بصورت

$$f_n\frac{d^ny}{dx^n} + f_{n-۱}\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}} + \cdots + f_۱\frac{dy}{dx} + f_۰y = g$$

باشد که در آن f_iها و g توابعی از x هستند و مسلماً هر معادله‌ای که تمام مشتقات آن از توان یک باشند، خطی است.

مثال ۱.۱ مرتبه، درجه و خطی بودن معادلات دیفرانسیل زیر را ملاحظه نمائید:

$y''' - ٦xy' = ۲ - ۳e^x$	مرتبه ۳، درجه ۱ و خطی.
$y + ۹x(y')^۲ = e^x - ۵$	مرتبه ۱، درجه ۲ و غیرخطی (مشتق دارای توان ۲)
$x^۲\frac{d^۲y}{dx^۲} - ۲x\frac{dy}{dx} - (sinx)y = ۰$	مرتبه ۲، درجه ۱ و خطی
$y''y - ۲x + y' = e^x$	مرتبه ۲، درجه ۱ و غیرخطی
$۳t(\frac{dy}{dt})^۳ + ۴(sint)y^۴ - ۲ = ۰$	مرتبه ۱، درجه ۳ و غیرخطی
$t^۲\frac{d^۳y}{dt^۳} - sint\frac{dy}{dt} - cos(ty) = ۰$	مرتبه ۳، درجه ندارد و غیرخطی
$۵x\dot{y} - ۴(\dot{y})^۷y = x$	مرتبه ۱، درجه ۷ و غیرخطی است

۲.۱.۱ جواب معادلهٔ دیفرانسیل

تابع مفروضی که با مشتقاتش در یک معادلهٔ دیفرانسیل صدق می کند را **جواب معادلهٔ دیفرانسیل** یا یک **انتگرال معادله** گوئیم. تعبیر عبارت دوم چنین است که مانند عمل پادمشتقگیری در اینجا نیز حاصل معادله به یک نوع عمل انتگرالگیری ختم می شود. می توان دید که تابع $y = x^2 + 3$ جوابی برای معادله دیفرانسیل $y' - 2x = 0$ محسوب می شود.

مثال ۲.۱ بررسی کنید که $y = \dfrac{1}{x}$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y' + y^2 = 0$ است.

حل. با مشتق گیری از y داریم $y' = \dfrac{-1}{x^2}$ و با جایگذاری

$$y' + y^2 = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$$

برای هر $x \neq 0$ برقرار است. بنابراین $y = \dfrac{1}{x}$ در هر بازه‌ای که شامل مبدأ نباشد جواب معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود.

مثال ۳.۱ بررسی کنید که $y_1 = e^{-2x}$ و $y_2 = e^{-3x}$ جوابهائی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = 0$ هستند.

حل. با مشتق گیری از y_1 داریم $y' = -2e^{-2x}$ و $y'' = 4e^{-2x}$ که با جایگذاری در معادله چنین بدست می آید:

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{-2x} - 10e^{-2x} + 6e^{-2x} = 0$$

برای y_2 نیز می نویسیم $y' = -3e^{-3x}$ و $y'' = 9e^{-3x}$ و با جایگذاری در معادله

$$y'' + 5y' + 6y = 9e^{-3x} - 15e^{-2x} + 6e^{-3x} = 0$$

پس $y_1 = e^{-2x}$ و $y_2 = e^{-3x}$ در فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل مذکور خواهند بود.

دو جواب $y = e^{-2x}$ و $y = e^{-3x}$ را **جواب های اولیهٔ مستقل** معادله نامیم. آنچه در مثال قبل دیده می شود آنست که معادله دیفرانسیل ممکن است دارای دو یا چند جواب اولیه باشد و براحتی می توان دید که بازای اعداد دلخواهی مانند C_1 و C_2،

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$$

نیز جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = 0$ است. این جواب معادلهٔ دیفرانسیل که شامل یک یا چند ثابت اختیاری است را **جواب عمومی** معادله دیفرانسیل گوئیم. مثلاً $y = Ce^{2x} + 3x$

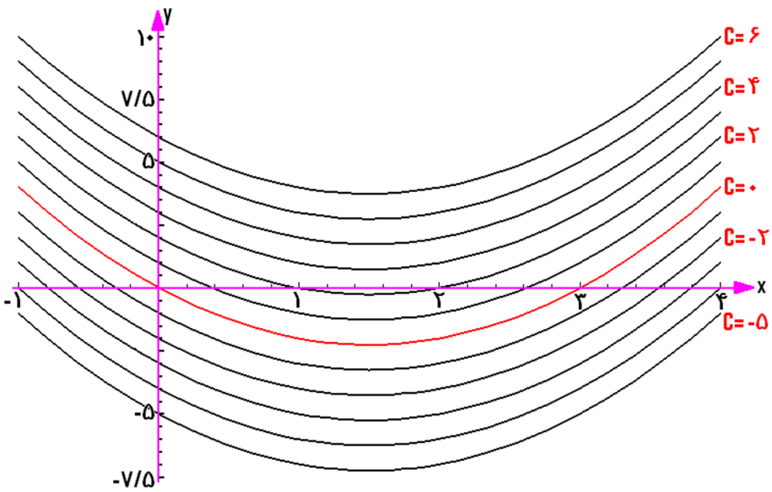
یک جواب عمومی برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} - ۲y = ۳ - ۶x$$

است، زیرا بازای هر ثابت عددی C در آن صدق می کند. اگر جواب عمومی بازاء پارامتر مشخصی یک جواب اولیه باشد، آنرا یک **جواب خصوصی** معادله دیفرانسیل گوئیم. مثلاً تابع $y = Cx + C^۲$ برای هر ثابت دلخواه C در معادلهٔ $y - (y')^۲ = xy'$ صدق می کند، پس جواب عمومی آن خواهد بود[۱]. از طرفی $y = \frac{۱}{۴}Cx^۲$ تنها برای $C = -۱$ در این معادله دیفرانسیل صدق می کند بنابراین $y = -\frac{۱}{۴}x^۲$ یک جواب خصوصی معادله است. باید گفت که جواب خصوصی از جواب عمومی تحت شرایط ویژه‌ای بدست می آید. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴.۱ مطلوبست حل معادلهٔ دیفرانسیل $y' = ۲x - ۳$.

حل. از آنجائی که $y' = \frac{dy}{dx}$ است با جایگذاری این مقدار در معادله داریم $\frac{dy}{dx} = ۲x - ۳$ و از آنجا $dy = (۲x - ۳)dx$ با انتگرالگیری از طرفین $\int dy = \int (۲x - ۳)dx + C$ و توابع $y = x^۲ - ۳x + C$ برای هر ثابت دلخواه C جواب عمومی معادله بوده که دسته‌ای از منحنی ها بشکل ۱.۱ زیر است. اگر $C = ۰$ تابع $y = x^۲ - ۳x$ یکی از جواب های خصوصی معادله خواهد بود.



شکل ۱.۱ شکل چند عضو از دسته منحنی مثال ۴.۱

[۱]— این نمایش از جواب معادله که به شکل $y = f(x)$ است جوابی صریح نامیده می شود ولی همیشه تمام جوابها صریح نبوده و ممکن است در شکل $F(x, y, C) = ۰$ ظاهر شوند که جواب ضمنی نامیده می شوند و با مشتقگیری ضمنی در معادله صدق خواهند کرد.

در برخی حالات که جواب حاصل، از خود معادله بدست نیامده و بعبارتی جوابی خصوصی معادله بدون هیچ مقدار C از جواب عمومی بدست آید و در معادله صدق می کند، آنرا **جواب غیرعادی** یا **جواب منفرد** معادله نامیم.

بطورکلی جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول دارای یک پارامتر روی جواب اولیه و مرتبه دوم دارای دو پارامتر روی دو جواب اولیه مستقل است. بهمین صورت جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n، دارای n جواب اولیه مستقل است و می توان گفت که تعداد پارامترها برابر مرتبهٔ معادله دیفرانسیل است. مفهوم استقلال جوابها را در فصول بعد توضیح خواهیم داد.

۳.۱.۱ مقادیر اولیه و مقادیر مرزی

جهت حذف پارامتر در جواب عمومی و بدست آوردن جواب خصوصی، معادله را تحت شرایطی بیان می کنند. در بیشتر حالات جواب عمومی معادله بیان می کند که معادله دارای بی نهایت جواب خصوصی است و چون هر منحنی جواب، از نقطهٔ خاصی می گذرد این نقاط را بعنوان شروطی تحت عنوان مقادیر اولیه و مقادیر مرزی بیان می کنیم. **مقادیر اولیه** شرایطی هستند که با یک طول بیان می شوند، مانند:

$$y(۴) = ۰ \quad , \quad y'(۴) = ۳ \quad , \quad y''(۴) = -۲$$

و **مقادیر مرزی** شرایطی را گویند که برای طول های متفاوت بیان می گردند، مانند:

$$y(۴) = ٦ \quad , \quad y(۲) = -۱ \quad , \quad y'(۴) = ۳$$

فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل زیر با مقادیر اولیه داده شده است:

$$y'' - ۲y' - ۳y = ۰ \qquad ; \qquad y(۰) = ۱ \ \ , \ \ y'(۰) = -۵$$

جواب عمومی این معادله برای A و B های دلخواه بصورت $y(x) = Ae^{-x} + Be^{۳x}$ می باشد که با قرار دادن مقادیر اولیهٔ داده شده در این جواب عمومی و بدست آوردن A و B بصورت زیر

$$\left\{ \begin{array}{l} y(۰) = ۱ \Rightarrow \quad Ae^{\circ} + Be^{\circ} = ۱, \\ y'(۰) = -۵ \Rightarrow -Ae^{\circ} + ۳Be^{\circ} = -۵. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = ۱, \\ -A + ۳B = -۵. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = ۲, \\ B = -۱. \end{array} \right.$$

جواب خصوصی $y(x) = ۲e^{-x} - e^{۳x}$ حاصل می شود. مسئلهٔ یافتن جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل که در یک یا چند شرط اولیه صدق کند یک **مسئلهٔ مقدار اولیه** نام دارد.

مثال ۵.۱ معادلهٔ دیفرانسیل $x' = x(1-\sin t)$ را با مقدار اولیه $x(0)=1$ حل کنید.

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(1-\sin t)\\
\frac{dx}{x} &= (1-\sin t)dt\\
\int \frac{dx}{x} &= \int (1-\sin t)dt\\
lnx &= t+\cos t + C \qquad ; \qquad C=\ln C_1\\
x(t) &= C_1 e^{t+\cos t}
\end{aligned}$$

و جواب خصوصی بازای $x(0)=1$ عبارتست از $x(t)=e^{-1+t+\cos t}$.

مثال ۶.۱ برای حل $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0$ با شرط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$ می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial g}{\partial y}dy &= 0\\
f(x)-f(x_0)+g(y)-g(y_0) &= 0\\
f(x)+g(y) &= f(x_0)-g(y_0)
\end{aligned}$$

در این روش حل، جواب خصوصی را بطور مستقیم می توان پیدا نمود.

تمرین ۱.۱ .

۱) تحقیق کنید که آیا توابع زیر جواب معادله دیفرانسیل مربوطه هستند یا خیر.

$$\begin{array}{lll}
a) & y=C_1\sin x + C_2\cos x + 1 & ; \quad y''+y=1\\
b) & y=Ce^{2x} & ; \quad y'-2y=0\\
c) & y^2=x^2+C & ; \quad yy'=x\\
d) & y=C\cosh 3x & ; \quad y''+9y=0\\
e) & y=2+\dfrac{C}{x} & ; \quad xy'+y=2\\
f) & y^2=e^{Cx} & ; \quad xy'=y\ln y\\
g) & y=xtg(\ln x + C) & ; \quad x^2y'-xy=x^2+y^2\\
h) & y=\ln x + C & ; \quad xy'=1
\end{array}$$

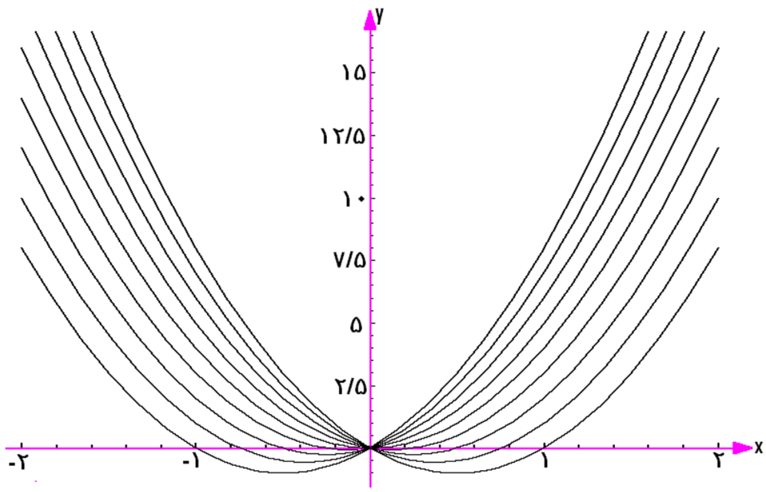
۲) جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $(y')^2+y^2=0$ بیان کنید. آیا می توانید معادلهٔ دیفرانسیلی مثال بزنید که دارای جواب نباشد؟

۲.۱ منحنی های جواب

از آنچه گفته شد درمی یابیم که جواب عمومی یک معادله برای مقادیر بیشماری از اعداد، جواب های خصوصی متعددی را نشان می دهد. این جواب های بیشمار، که در شکل تابع $f(x,y,C)=\circ$ بهمراه پارامتر C ظاهر می شوند، باعث می شود تا با جایگذاری مقادیر مختلفی از اعداد حقیقی بجای C منحنی خاصی حاصل گردد و بعبارتی $f(x,y,C)=\circ$ نشان دهندهٔ تعداد خاصی منحنی مختص به معادله است. این تعداد منحنی جواب را با نام **دستهٔ منحنی ها** یا **خانوادهٔ منحنی ها** می شناسیم که گاهی اوقات نام **منحنی های انتگرال** بخود می گیرد. شکل ۱.۱ دسته ای از منحنی ها را نشان می دهد که همه از جواب عمومی $y=x^{۲}-۳x+C$ حاصل شده اند. بدیهی است که «هر جواب خصوصی تنها یکی از این منحنی ها خواهد بود» و این جواب خصوصی تحت مقدار اولیه، جوابی یکتاست.

از طرفی دیگر با حذف C در دسته منحنی $f(x,y,C)=\circ$ می توان معادلهٔ دیفرانسیلی بدست آورد که به تنهائی گویای این خانواده باشد. برای بدست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل دستهٔ منحنی $f(x,y,C)=\circ$، با محاسبهٔ مشتق $\frac{d}{dx}f(x,y,C)=\circ$ و حذف C در این دو معادله، می توان معادلهٔ دیفرانسیلی مربوطه را بدست آورد. می توان چنین گفت که «هر معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ یک دسته منحنی است».

مثال ۷.۱ معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی های $y=۴x^{۲}+Cx$ را بدست آورید.



شکل ۲.۱ شکل دسته منحنی مثال ۷.۱

حل. با مشتق از تابع $y' = 8x + C$ و حذف C بین دو معادله داریم:

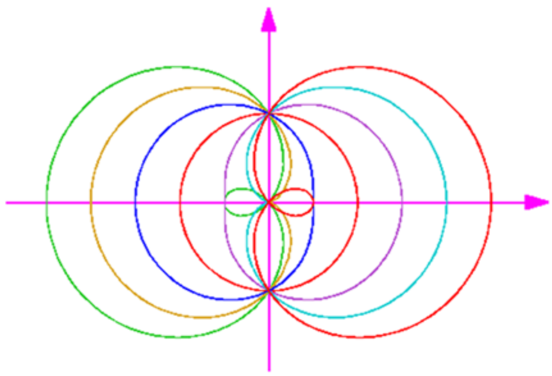
$$C = y' - 8x \Rightarrow y = 4x^2 + (y' - 8x)x \Longrightarrow xy' - y = 4x^2$$

شکل۱.۲ این دسته منحنی را نشان می دهد. کلی تر اینکه برای یافتن معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی هائی با n پارامتر، با محاسبهٔ n مشتق متوالی از خانواده می توان دستگاه $n+1$ معادله و n پارامتر مجهول نوشت و پارامترها را بین آنها حذف نمود.

مثال ۸.۱ معادلهٔ یک دسته دلگون در مختصات قطبی به شکل $\rho = C_1 + C_2 \cos\theta$ است. معادله دیفرانسیل این دسته منحنی را بنویسید.

حل. با دو بار مشتقگیری از ρ نسبت به θ و حذف پارامترها چنین بدست می آوریم:

$$\begin{cases} \rho' = -C_2 \sin\theta, \\ \rho'' = -C_2 \cos\theta. \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho''} = \frac{-C_2 \sin\theta}{-C_2 \cos\theta} \Rightarrow \rho' - \rho'' tg\theta = 0$$



شکل ۳.۱ شکل دسته دلگون مثال ۸.۱

۱.۲.۱ مسیرهای متعامد بر یک دسته منحنی

اگر بخواهیم بر هر منحنی از خانوادهٔ منحنی های $f(x, y, C) = 0$ یک منحنی عمود کنیم، خانواده‌ای پدید می آید که **دسته مسیرهای متعامد** نام می گیرد. برای یافتن دسته مسیرهای متعامد، ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی مربوطه را بصورت $F(x, y, y') = 0$ پیدا نموده و سپس بجای y' مقدار $\frac{-1}{y'}$ را قرار داده تا دسته مسیرهای متعامد بدست آید. بدین ترتیب معادلهٔ دسته مسیرهای متعامد در شکل $F(x, y, \frac{-1}{y'}) = 0$ ظاهر خواهند شد.

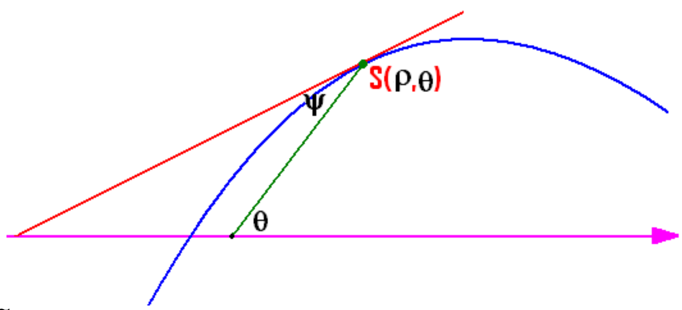
مثال ۹.۱ دسته مسیرهای متعامد خانواده منحنی مثال ۷.۱ را بیابید.

حل. چون $xy' - y = ۴x^۲$ با جانشینی مورد نظر $x\frac{-۱}{y'} - y = ۴x^۲$ و با ساده کردن آن، دسته مسیرهای متعامد بصورت $۴x^۲y' + yy' + x = ۰$ بدست می آید.

در حالتی که دسته منحنی ها در مختصات قطبی (ρ,θ) داده شده باشد، اگر ψ زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس باشد، پس

$$tg\psi = \rho\frac{d\theta}{d\rho}$$

و برای یافتن مسیرهای متعامد بر دسته منحنی باید مقدار $-\frac{d\rho}{\rho d\theta}$ را جایگزین این مقدار نمائیم. بعبارتی ساده تر برای یافتن دسته مسیرهای متعامد بر یک دسته منحنی در مختصات قطبی، کافیست بجای $\frac{d\rho}{d\theta}$ مقدار $-\rho^۲\frac{d\theta}{d\rho}$ را قرار دهیم.



شکل ۴.۱ منحنی در مختصات قطبی و وضعیت شعاع حامل و مماس بر آن

مثال ۱۰.۱ معادلهٔ دسته مسیرهای متعامد بر خانوادهٔ $\rho = C(۱ + \sin\theta)$ را بیابید.

حل. $\frac{d\rho}{d\theta} = C\cos\theta$ و چون $C = \frac{\rho}{۱ + \sin\theta}$ است با جایگذاری، دسته منحنی بصورت

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho\cos\theta}{۱ + \sin\theta}$$

حاصل می شود. منحنی های متعامد با جایگذاری $-\rho^۲\frac{d\theta}{d\rho}$ بجای $\frac{d\rho}{d\theta}$ بدست می آیند پس:

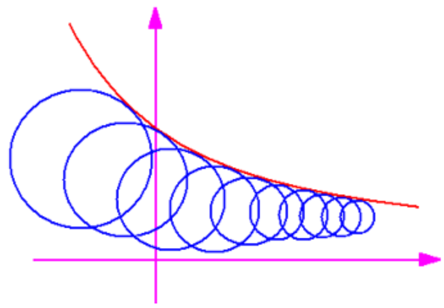
$$-\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\cos\theta}{\rho(۱ + \sin\theta)}$$

و بالاخره با ساده کردن معادله دسته مسیرهای متعامد بصورت زیر است:

$$\frac{d\rho}{\rho} + (sec\theta + tg\theta)d\theta = ۰$$

۲.۲.۱ پوش یک دسته منحنی

هنگامی که یک منحنی بر دسته ای از منحنی ها مماس باشد گوئیم این منحنی **پوش دسته منحنی** است. گیریم که $f(x,y,C)=0$ دسته منحنی مورد نظر است، برای یافتن منحنی ϕ که بر تمام منحنی های این خانواده مماس باشد کافیست پارامتر C را بین معادلات $f(x,y,C)=0$ و مشتق آن $\frac{d}{dC}f(x,y,C)=0$ حذف نمائیم. شکل زیر پوش یک دسته دایره را نشان می دهد.



شکل ۵.۱ پوش یک دسته دایره

مثال ۱۱.۱ پوش دسته منحنی $y=2C(1-Cx)$ را بیابید.

حل. معادلهٔ $f(x,y,C)=0$ و مشتق آن $\frac{d}{dC}f(x,y,C)=0$ عبارتند از

$$\begin{cases} f(x,y,C)=y-2C+2C^2x=0, \\ \frac{d}{dC}f(x,y,C)=-2+4Cx=0. \end{cases}$$

پس از یافتن $C=\frac{1}{2x}$ از معادلهٔ دوم و جایگذاری در معادلهٔ اول

$$y-2\frac{1}{2x}+2(\frac{1}{2x})^2x=0$$

با ساده کردن جواب، منحنی پوش $y=\frac{1}{2x}$ خواهد بود.

تمرین ۲.۱ تمرینات تکمیلی.

۱) مرتبه و درجهٔ معادلات دیفرانسیل زیر و نیز خطی بودن آنها را تعیین کنید.

(a)	$(y')^3+xy''-4x^4=2y$	(b)	$y'+(2x-1)y=x^3y^4$
(c)	$y'+y''+y'''=0$	(d)	$\rho'''=0$
(e)	$\rho\theta-\rho\rho'=(\rho')^2$	(f)	$\sin(xy^2)=y''-1$

۲) تحقیق کنید که برای معادلهٔ دیفرانسیل $y''+y=۰$ تابع $y(x)=A\sin x+B\cos x$ بازای هر A و B دلخواه جواب عام معادله بوده و سپس جواب خاص آنرا بازای مقادیر مرزی $y'(\pi)=۳$ و $y(۰)=-۲$ بدست آورید.

۳) معادلهٔ دیفرانسیل هرکدام از دسته منحنی های زیر را بیابید. نموداری از هر خانواده را رسم کرده و معادله دیفرانسیل دسته مسیرهای متعامد بر آنها را نیز پیدا نمائید.

$$(a)\quad y=Cx^{۲} \qquad , \qquad (b)\quad x^{۲}+y^{۲}=Cy$$
$$(c)\quad y=\frac{C}{x^{۲}} \qquad , \qquad (d)\quad y^{۲}=۲x^{۲}+Ce^{x}-۱$$
$$(e)\quad y^{۲}=x^{۲}+C_{۱}e^{x}+C_{۲} \qquad , \qquad (f)\quad \rho=\frac{C}{\sin\theta}$$
$$(g)\quad y=C_{۱}e^{۳x}+C_{۲}e^{-۲x} \qquad , \qquad (h)\quad y=C_{۱}x^{۳}+x^{۲}$$
$$(i)\quad \rho=C_{۱}tg\theta+C_{۲} \qquad , \qquad (j)\quad \rho=C\theta^{۲}$$
$$(k)\quad (x-C)^{۲}+y^{۲}=C^{۲} \qquad , \qquad (l)\quad y=C_{۱}x^{۲}-C_{۲}$$

۴) منحنی را از دسته منحنی $y=C_{۱}+C_{۲}x^{۲}$ بیابید که دارای مقادیر مرزی $y(۰)=۲$ و $y'(۱)=۴$ باشد.

۵) منحنی از خانواده $y=C_{۱}e^{۲x}+C_{۲}e^{-x}$ بیابید که از نقطهٔ $(۰,۲)$ گذشته و شیب آن در این نقطه برابر -۲ باشد.

٦) منحنی از خانواده $y=C_{۱}e^{x}+C_{۲}x$ بیابید که از نقطهٔ $(۰,۱)$ گذشته و $y'(۰)=۴$ باشد.

۷) نشان دهید که تابع $y=tgx+secx$ در فاصلهٔ $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $۲y'=y^{۲}+۱$ است.

۸) نشان دهید که تابع $y=e^{at}\sin bt$ بازای هر a و b حقیقی دلخواه، جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''-۲ay'+(a^{۲}+b^{۲})y=۰$$

است.

۹) با روش گفته شده در مثال ۱.۵ معادلات زیر را حل کنید.

$$(a)\ y'=y(۱-\cos t)\quad (b)\ y'=y^{۲}(۱+x^{۲})\quad (c)\ y'=ycotgt\quad (d)\ y'=y\ln ytgx$$

۱۰) معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به تمام خطوط واقع در صفحهٔ مختصات را پیدا کنید.

۱۱) معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به تمام دوایر بمرکز مبداء مختصات را بیابید.

۱۲) معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای قائم بر دسته‌ای از بیضی ها را پیدا کنید که مرکز آنها مبداء مختصات و قطر اطول آنها برابر مقدار ثابت $۲k$ است. سپس با روش گفته شده در مثال ۵.۱ معادله حاصل را حل نمائید.

۱۳) پوش دسته منحنی های زیر را پیدا نمائید.

$$(a) \quad ۴x^۲ - xy = C(x-y) - C^۲ \quad , \quad (b) \quad x^۲y - x^۲ + y = (x-C)^۲$$

$$(c) \quad ۲C - ۵y = ۲C^۲x \quad , \quad (d) \quad y = \frac{x}{C} + \frac{C}{x}$$

فصل ۲

معادلات مرتبهٔ اول

در این فصل به حل معادلات مرتبه اول می پردازیم که به شکل کلی $f(x, y, y') = 0$ هستند. در این حالت درجه معادله یک در نظر گرفته شده و توان x و y دلخواه است و مسلماً جواب عمومی در این معادلات تنها دارای یک ثابت C حقیقی خواهد بود. روشهای حل ما مبتنی بر روشهای جبری بوده و جوابها اغلب سرراست هستند و گاهی نیز ناگزیریم تا جوابها را بصورت ضمنی بپذیریم. مانند فصل قبل در اکثر جاها بجای y' از نماد لایب نیتز $\frac{dy}{dx}$ استفاده می کنیم.

۱.۲ معادلهٔ تفکیک پذیر

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول را تفکیک پذیر گوئیم اگر بتوان آنرا به شکل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad ; \quad f(x)dx = g(y)dy$$

نوشت و با انتگرالگیری از طرفین حاصل بصورت

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

بدست می آید که C ثابت دلخواهی است. در این روش که **روش حل معادله با توابع (گویا–لگاریتمی)** نیز نامیده می شود، متغیرها حالتی **جداشدنی** داشته و بایستی x و وابستگان آن در یک طرف و y و وابستگان آن در طرف دیگر قرار بگیرند. جواب معادلات ممکن است منتهی به انتگرالی از نوع توابع گویا، توابع لگاریتمی یا تابعی متعالی شود. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱.۲ حل معادلهٔ دیفرانسیل $e^x dx - ydy = ۰$ با مقدار اولیهٔ $y(۰) = ۲$.

حل.

$$\begin{aligned} e^x dx &= ydy \\ \int e^x dx &= \int ydy + C \\ e^x &= \frac{۱}{۲}y^۲ + C \end{aligned}$$

بازای مقدار اولیهٔ $y(۰) = ۲$ چون $e^\circ = ۲ + C$ لذا $C = -۱$ بوده و $e^x = \frac{۱}{۲}y^۲ - ۱$ جواب خصوصی معادله است.

مثال ۲.۲ معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = y - y^۲$ با مقدار اولیهٔ $y(۰) = \frac{۱}{۲}$ را حل نمائید.

حل.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y - y^۲} &= dx \\ \int \frac{dy}{y(۱ - y)} &= \int dx + C \\ \ln \frac{y}{۱ - y} &= x + C \\ y(x) &= \frac{ke^x}{۱ + ke^x} \qquad ; \qquad k = e^C \end{aligned}$$

بازای $y(۰) = \frac{۱}{۲}$ داریم $k = ۱$ و $y(x) = \frac{e^x}{۱ + e^x}$ جواب خصوصی معادله است.

مثال ۳.۲ حل معادلهٔ $۲yy' = e^x$.

حل.

$$\begin{aligned} ۲yy' &= e^x \\ ۲y\frac{dy}{dx} &= e^x \\ ۲y\, dy &= e^x\, dx \\ \int ۲y\, dy &= \int e^x\, dx + C \\ y^۲ &= e^x + C \end{aligned}$$

جواب عمومی معادله

مثال ۴.۲ مطلوبست حل معادلهٔ $y' = x^۳y^۵$.

حل.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^۳y^۵ \\ dy &= x^۳y^۵dx \\ \frac{dy}{y^۵} &= x^۳dx \\ \int \frac{dy}{y^۵} &= \int x^۳dx + C \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{-۱}{۴y^۴} &= \frac{x^۴}{۴} + C \\
x^۴y^۴ + ۴Cy^۴ &+ ۱ = ۰
\end{aligned}
$$

مثال ۵.۲ حل معادلهٔ $y(t^۲+۱)dt + (t^۳ - ۳t)dy = ۰$.

حل. اگر عوامل طرفین را بر $y(t^۳-۳t)$ تقسیم کنیم: $\frac{t^۲+۱}{t^۳-۳t}dt + \frac{۱}{y}dy = ۰$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{t^۲+۱}{t^۳-۳t}dt + \int \frac{۱}{y}dy = C \\
&\int \frac{t^۲+۱}{t(t-\sqrt{۳})(t+\sqrt{۳})}dt + \int \frac{۱}{y}dy = C \\
&\int \left(\frac{-\frac{۱}{۳}}{t} + \frac{\frac{۲}{۳}}{t-\sqrt{۳}} + \frac{\frac{۲}{۳}}{t+\sqrt{۳}}\right)dt + \int \frac{۱}{y}dy = C \\
&-\frac{۱}{۳}\ln|t| + \frac{۲}{۳}\ln|t-\sqrt{۳}| + \frac{۲}{۳}\ln|t+\sqrt{۳}| + \ln|y| = \ln C_۱ \quad ; \quad C = \ln C_۱ \\
&(t^۲-۳)^۲y^۳ = tC_۲ \qquad t > \sqrt{۳} \quad ; \quad C_۲ = \pm e^{۳C_۱}
\end{aligned}
$$

انتخاب ثابت $\ln C_۱$ بجای C اختیاری است و تاثیری روی جواب ندارد.

مثال ۶.۲ معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = y^۲ + ۲y + ۲$ را حل نمائید.

حل.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y^۲+۲y+۲} &= dx \\
\int \frac{dy}{y^۲+۲y+۲} &= \int dx + C \\
\arctan(y+۱) &= x + C \\
y &= tg(x+C) - ۱
\end{aligned}
$$

مثال ۷.۲ حل معادلهٔ دیفرانسیل $۹x^۸dx + \cos y dy = ۰$ با مقدار اولیهٔ $y(۱) = \pi$.

حل.

$$
\begin{aligned}
۹x^۸dx &= -\cos y dy \\
\int_۱^x ۹x^۸dx &= \int_\pi^y -\cos y dy \\
x^۹\Big|_۱^x &= -\sin y\Big|_\pi^y \\
x^۹ - ۱ &= -\sin y \\
y &= \arcsin(-x^۹ + ۱)
\end{aligned}
$$

روش حل بالا، بطور مستقیم منجر به یافتن جواب خصوصی می شود. (مانند مثال۱.۶)

تمرین ۱.۲ .

۱) معادلات تفکیک پذیر زیر را حل کرده و جواب عمومی آنها را بیابید. در مواردی که مقدار اولیه داده شده، جواب خصوصی را نیز پیدا کنید.

$$
\begin{array}{llll}
(a) \quad \frac{-۱}{x^{۳}}dx = dt & , & (b) \quad (t+۲e^{t})dy + y(۱+۲e^{t})dt = ۰ & \\
(c) \quad y' = -۴y & , & (d) \quad (۲-x)dy + (۵+y)dx = ۰ & \\
(e) \quad y' = y^{۲}x + y^{۲} & , & (f) \quad y' = -۳ys^{۲} & \\
(g) \quad xy' = ۳y & , & (h) \quad (x^{۲}+۱)(y+۱)dx = (x^{۳}-۳x)dy & \\
(i) \quad y' = ye^{x} & , & (j) \quad tdy - \sqrt{۱-y^{۲}}dt = ۰ & \\
(k) \quad y' = x^{۴}y^{۳} & , & (l) \quad (۴-x)dy + (۱+y^{۲})dx = ۰ & \\
(m) \quad y' = x^{۲}(۱+y^{۲}) & , & (n) \quad y'tgx + cotgy = ۰ & ; \quad y(۰) = ۰ \\
(o) \quad (۱+x)y' = -۳y & , & (p) \quad y' = x\cos y & ; \quad x(\frac{\pi}{۲}) = ۱ \\
(q) \quad y' + \cos x\, e^{y} = ۰ & , & (r) \quad y' + y = y(xe^{x^{۲}}+۱) & ; \quad y(۰) = ۱
\end{array}
$$

۲) معادله دیفرانسیل تمام سهمی‌هائی را بدست آورید که محور تقارن آنها محور ox است؟

۲.۲ معادلات همگن (متجانس)

تابع $f(x,y) = ۰$ را روی بازهٔ حقیقی I همگن از درجهٔ α گوئیم اگر برای هر t–ی که $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ داشته باشیم $tx, ty \in I$ و $f(tx,ty) = t^{\alpha}\ f(x,y)$. در زیر توابعی همگن بترتیب از درجهٔ ۱ و ۰/۵ و ۰ آمده است:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{۳x^{۲}+۵y^{۲}}{۴x} \\
&\Rightarrow f(tx,ty) = \frac{۳(tx)^{۲}+۵(ty)^{۲}}{۴(tx)} = \frac{t^{۲}(۳x^{۲}+۵y^{۲})}{۴tx} = t\ f(x,y) \Rightarrow \alpha = ۱ \\
f(x,y) &= \sqrt{x-y} \\
&\Rightarrow f(tx,ty) = \sqrt{tx-ty} = \sqrt{t}.\sqrt{x-y} = t^{\frac{۱}{۲}}\ f(x,y) \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲} \\
f(x,y) &= \frac{۲x^{۲}y-y^{۳}}{xy^{۲}} \\
&\Rightarrow f(tx,ty) = \frac{۲(tx)^{۲}(ty)-(ty)^{۳}}{(tx)(ty)^{۲}} = \frac{t^{۳}(۲x^{۲}y-y^{۳})}{t^{۳}(xy^{۲})} = f(x,y) \Rightarrow \alpha = ۰
\end{aligned}
$$

در حالت خاص معادله دیفرانسیلی که طرف راست آن تابع $f(x,y)$ **همگن از درجهٔ صفر** است — یعنی $f(tx,ty)=f(x,y)$ — را می توان حل نمود. برای حل معادلات به روش همگن از درجهٔ صفر، ابتدا باید شکل معادله را بصورت $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ یا $y'=f(x,y)$ بنویسیم و در مورد همگن بودن $f(x,y)$ تحقیق نمائیم. سپس با تغییر متغیر $y=ux$ و مشتق آن $y'=u'x+u$ معادله را بر حسب u و x بشکل زیر ساده کنیم:

$$u'x+u=f(x,y)=f(\frac{1}{x}x,\frac{1}{x}y)=f(1,\frac{y}{x})=f(1,u)$$

پس از حل معادله u بر حسب x، متغیر را با جایگزینی $u=\frac{y}{x}$ به متغیر اولیه برمی گردانیم.

مثال ۸.۲ حل معادلهٔ

$$y'=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}$$

حل. شرط همگن بودن را برای تابع سمت راست بررسی می کنیم:

$$f(tx,ty)=\frac{2(ty)^4+(tx)^4}{(tx)(ty)^3}=\frac{t^4(2y^4+x^4)}{t^4(xy^3)}=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}=f(x,y)$$

بنابراین معادله همگن از درجهٔ صفر است. با جانشینی $y=ux$ و $y'=u'x+u$ داریم:

$$\begin{aligned}
u'x+u &= \frac{2(ux)^4+x^4}{x(ux)^3}\\
u'x+u &= \frac{x^4(2u^4+1)}{x^4u^3}\\
u'x &= \frac{2u^4+1}{u^3}-u\\
u'x &= \frac{u^4+1}{u^3}\\
\frac{du}{dx}x &= \frac{u^4+1}{u^3}\\
\int\frac{u^3}{u^4+1}du &= \int\frac{dx}{x}\\
\frac{1}{4}\ln|u^4+1| &= \ln|x|+\ln C \quad , \qquad x>0\\
\sqrt[4]{u^4+1} &= C|x|\\
\sqrt[4]{(\frac{y}{x})^4+1} &= C|x|\\
y^4 &= kx^8-x^4 \qquad , \quad x>0 \quad ; \quad k=C^4\\
y &= x\sqrt[4]{kx^4-1} \quad , \quad x>k^{-4}
\end{aligned}$$

مثال ۹.۲ مطلوبست حل معادلهٔ $xdy - ydx - \sqrt{x^۲ - y^۲}dx = ۰$

حل. می نویسیم $xdy = (y + \sqrt{x^۲ - y^۲})dx$ لذا $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^۲ - y^۲}}{x}$ شرط همگن بودن را بررسی می کنیم:

$$f(tx, ty) = \frac{ty + \sqrt{t^۲x^۲ - t^۲y^۲}}{tx} = \frac{y + \sqrt{x^۲ - y^۲}}{x} = f(x, y)$$

بنابراین معادله همگن از درجهٔ صفر است. با جانشینی $y = ux$ و $y' = u'x + u$ می نویسیم:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y + \sqrt{x^۲ - y^۲}}{x}\\
u'x + u &= \frac{ux + \sqrt{x^۲ - (ux)^۲}}{x}\\
u'x + u &= u + \sqrt{۱ - u^۲}\\
\frac{du}{dx}x &= \sqrt{۱ - u^۲}\\
\frac{du}{\sqrt{۱ - u^۲}} &= \frac{dx}{x}\\
\int \frac{du}{\sqrt{۱ - u^۲}} &= \int \frac{dx}{x} + C\\
\arcsin u &= \ln x + C \qquad , \qquad x > ۰\\
y &= x\sin(\ln x + C) \qquad , \qquad x > ۰
\end{aligned}$$

مطلب ۱.۲ در معادلاتی به شکل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = ۰$ که $M(x, y)$ و $N(x, y)$ هردو توابعی همگن از درجه α هستند می توان با تشکیل نسبت

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$$

آنرا به معادله ای همگن از درجه صفر تبدیل نمود[۱]. از طرفی نیز با تغییر متغیر $y = ux$ و دیفرانسیل آن $dy = x.du + u.dx$ و جایگذاری در معادلهٔ اولیه داریم:

$$\begin{aligned}
&M(x, ux)dx + N(x, ux)(x.du + u.dx) = ۰\\
&x^\alpha M(۱, u)dx + x^\alpha N(۱, u)(x.du + u.dx) = ۰\\
&\Big[M(۱, u) + uN(۱, u)\Big]dx + xN(۱, u)du = ۰\\
&-\ln x = \int \frac{N(۱, u)}{M(۱, u) + uN(۱, u)}du + C
\end{aligned}$$

[۱]– توابع M و N را توابع متجانس گوئیم.

تمرین ۲.۲ .

۱) معادلات زیر را با روش همگن حل نمائید.

$$(a)\quad x+y=xy' \quad , \quad (b)\quad (x^{۲}+y^{۲})dx+xydy=۰$$

$$(c)\quad (x^{۲}-y^{۲})dx+۲xydy=۰ \quad , \quad (d)\quad (۲ye^{\frac{y}{x}}-x)y'+(۲x+y)=۰$$

$$(e)\quad (x-۲y)dx+(۲x+y)dy=۰ \quad , \quad (f)\quad (xy+y^{۲})y'+(xy+x^{۲})=۰$$

$$(g)\quad xy'=y+x\sin\frac{y}{x} \quad , \quad (h)\quad xy'=\ln x-\ln y+y$$

۲) نشان دهید که اگر در معادلهٔ مرتبه اول $y'=f(x,y)$ تابع $f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد با تغییر متغیر $y=ux$ می توان آنرا تفکیک نموده و بنویسیم:

$$ln|x|=\int\frac{du}{f(۱,u)-u}$$

۳.۲ تبدیلات متفرقه

مانند حل معادلات همگن که تبدیل $y=ux$ بکار گرفته می شود، برخی معادلات نیز با جانشینی برخی عبارات مفید و تبدیلات سودمند ساده تر خواهند شد.

(الف) معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$y'=g(ax+by+c) \quad , \quad b\neq ۰$$

به کمک تبدیل $u=ax+by+c$ به معادلهٔ تفکیک پذیر $u'=a+bg(u)$ تبدیل می شود.

مثال ۱۰.۲ حل معادلهٔ $y'=(۴x-y+۱)^{۲}$ با مقدار اولیهٔ $y(۰)=-۳$.

حل. با فرض $u=۴x-y+۱$ که با مشتقگیری از طرفین و جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned}
u' &= ۴-y' \\
\frac{du}{dx} &= ۴-u^{۲} \qquad ; \quad u(۰)=۴ \\
\frac{du}{۴-u^{۲}} &= dx \\
\int\frac{du}{۴-u^{۲}} &= \int dx+C \\
\frac{۱}{۴}\ln|\frac{u+۲}{u-۲}| &= x+C \qquad ; \quad u(۰)=۴ \\
u(۰)=۴ \quad &\Rightarrow \quad C=\frac{۱}{۴}\ln ۳ \\
y &= ۴x-۱-\frac{۴}{۳e^{۴x}-۱}
\end{aligned}$$

(ب) برای معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$y' = g\Big(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\Big) \quad , \quad a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; b,b' \neq ۰$$

که حالت کلی تر (الف) است و آنرا معادلهٔ ژاکوبی نامند، اگر (s,t) جواب دستگاه

$$\begin{cases} ax+by+c = ۰, \\ a'x+b'y+c' = ۰. \end{cases}$$

باشد (شرط وجود جواب دستگاه اینست که $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq ۰$)، پس با تغییر متغیرهای $x = u + s$ و $y = v + t$ معادله ژاکوبی به معادلهٔ همگن با متغیرهای u و v تبدیل می شود. اما اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ۰$ باشد، چون $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$ است، جانشین مناسب جهت حل معادلهٔ دیفرانسیل، $u = ax + by$ خواهد بود که به معادله‌ای تفکیک پذیر مبدل می گردد.

مثال ۱۱.۲ حل معادلهٔ

$$(x+y-۳)dx - (x-y+۱)dy = ۰$$

حل. می نویسیم $y' = \frac{x+y-۳}{x-y+۱}$ و دستگاه $\begin{cases} x+y-۳ = ۰ \, , \\ x-y+۱ = ۰. \end{cases}$ دارای جواب است زیرا $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} = -۲ \neq ۰$ با حل دستگاه و یافتن جواب $(۱,۲)$ جانشینی های $x = u + ۱$ و $y = v + ۲$ را در نظر گرفته و با دیفرانسیل گیری و جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x+y-۳}{x-y+۱} \\ \frac{dv}{du} &= \frac{u+v}{u-v} \\ z'u + z &= \frac{۱+z}{۱-z} \qquad ; \;\; v = zu \quad \text{معادله همگن با جانشین} \\ \int \frac{۱-z}{۱+z^۲}dz &= \int \frac{۱}{u}du + C_۱ \\ arctgz - \frac{۱}{۲}\ln(۱+z^۲) &= \ln|u| + \ln C \\ arctg(\frac{v}{u}) &= \ln(C|u|\sqrt{۱+(\frac{v}{u})^۲}) \\ arctg(\frac{y-۲}{x-۱}) &= \ln\Big(C\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۲)^۲}\Big) \end{aligned}$$

(ج) برخی از معادلات را می بایست با تبدیلات دلخواه ساده نمود. یافتن اینگونه تبدیلات وابسته به تجربه است.

مثال ۱۲.۲ حل معادلهٔ

$$y(۳x^۲+۲y^۲-۷)dy-x(۸x^۲+۳y^۲-۷)dx=۰$$

حل. با فرض $X=x^۲$ و $Y=y^۲$ و سپس دیفرانسیل از آنها $۲xdx=dX$ و $۲ydy=dY$ و با جایگذاری داریم

$$(۳X+۲Y-۷)dY-(۸X+۳Y-۷)dX=۰$$

برای تغییر متغیرهای $X=u+s$ و $Y=v+t$ نیاز به یافتن ثابتهای s و t است پس:

$$\begin{cases} ۳X+۲Y-۷=۰\ , \\ ۸X+۳Y-۷=۰. \end{cases} \quad \Rightarrow s=-۱\ ,\ t=۵$$

و معادله با تغییر متغیرهای $X=u-۱$ و $Y=v+۵$ به معادلهٔ همگن

$$\frac{dv}{du}=\frac{۸u+۳v}{۳u+۲v}$$

تبدیل می شود. پس از حل معادله بروش همگن داریم $(v-۲u)^۷(v+۲u)=C$ که با برگرداندن متغیرها به x و y جواب عمومی عبارتست از تابع ضمنی

$$(y^۲-۲x^۲-۷)^۷(y^۲+۲x^۲-۳)=C$$

(د) گاهی اوقات جابجا کردن متغیر مستقل و وابسته به حل معادله کمک می کند. به مثال زیر دقت نمائید:

مثال ۱۳.۲ حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$(۱+۲e^{\frac{x}{y}})dx+۲e^{\frac{x}{y}}(۱-\frac{x}{y})dy=۰$$

حل. با تعویض x و y معادله چنین می شود

$$(۱+۲e^{\frac{y}{x}})dy+۲e^{\frac{y}{x}}(۱-\frac{y}{x})dx=۰$$

می نویسیم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{۲e^{\frac{y}{x}}(۱-\frac{y}{x})}{۱+۲e^{\frac{y}{x}}}$$

با بررسی اینکه معادله همگن از درجه صفر است و با جانشینی $y=ux$ داریم:

$$u'x+u \quad = \quad -\frac{۲e^{u}(۱-u)}{۱+۲e^{u}}$$

$$\begin{aligned}
u'x &= \frac{-۲e^u-u}{۱+۲e^u}\\
\frac{du}{dx}x &= \frac{-۲e^u-u}{۱+۲e^u}\\
\frac{۱+۲e^u}{-۲e^u-u}du &= \frac{dx}{x}\\
-\int\frac{۱+۲e^u}{۲e^u+u}du &= \int\frac{dx}{x}+C\\
-\ln|۲e^u+u| &= \ln|x|+\ln C\\
۲e^u+u &= \frac{۱}{Cx}\\
۲e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x} &= \frac{۱}{Cx}\\
۲ye^{\frac{x}{y}}+x &= k \qquad ; \quad k=\frac{۱}{C}
\end{aligned}$$

مثال ۱۴.۲ حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=\frac{y-xy^۲}{x^۲y+x}$$

حل. این معادله همگن و تفکیک پذیر نبوده ولی می توان با جانشینی ux^n بجای y، بازای مقدار مناسبی از n آنرا حل کرد. چنین می شود:

$$\begin{aligned}
u'x^n+nx^{n-۱}u &= \frac{ux^n-xu^۲x^{۲n}}{x^۲ux^n+x}\\
u'x^n &= \frac{ux^n-u^۲x^{۲n+۱}}{ux^{n+۲}+x}-nx^{n-۱}u\\
u'x^n &= \frac{ux^n(۱-n)-u^۲x^{۲n+۱}(۱+n)}{ux^{n+۲}+x}
\end{aligned}$$

کافیست در صورت طرف راست معادله، مقدار $n+۱$ را صفر قرار دهیم و با اینکار بزرگترین توان عامل از بین خواهند رفت و با جایگذاری $n=-۱$ معادله به شکل

$$u'=\frac{۲u}{x(u+۱)}$$

تبدیل شده که تفکیک پذیر است. جواب این معادله $u+\ln u=۲\ln x+C$ است که با بازگرداندن متغیر $u=xy$ جواب عمومی بصورت تابع ضمنی

$$xy+\ln y-\ln x=C$$

خواهد بود.

تمرین ۳.۲ .

۱) معادلات زیر را با روش تغییر متغیر حل کنید:

$(a)\quad (x-y)dx+dy=0 \quad , \quad (b)\quad y'=\sin(x+y)$

$(c)\quad tg^2(t+y)dt-dy=0 \quad , \quad (d)\quad y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$

$(e)\quad y'=\dfrac{3y-2x}{x} \quad , \quad (f)\quad (-4x-y+4)dx+(4y+x-1)dy=0$

$(g)\quad y'=(2x-y+1)^3 \quad , \quad (h)\quad \dfrac{dy}{dx}=(y-4x)^2$

$(i)\quad y'=\dfrac{2x+2y-5}{3x+3y-7} \quad , \quad (j)\quad (4x-y+7)dx+(2x+y-1)dy=0$

۲) معادلات دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر $y=ux^n$ بازاء مقدار مناسبی از n حل نمائید.

$(a)\quad y'=\dfrac{1-3x^3y^2}{2x^4y} \quad , \quad (b)\quad y'=\dfrac{2xy^2}{1-x^2y} \quad , \quad (c)\quad y'=\dfrac{y-2xy^2}{x}$

۴.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل

بسیاری از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را می توان به شکل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

نوشت. این شکل از معادله اگر دارای شرط کامل بودن باشد، دارای جوابی بصورت تابع ضمنی $f(x,y)=C$ است. این روش حل معادله از مهمترین روشها در حل معادلات مرتبه اول بشمار می رود. در ابتدا به مفهوم کامل بودن می پردازیم.

معادلهٔ دیفرانسیل (۱) را کامل گوئیم اگر دیفرانسیل یک تابع باشد، یعنی تابعی پیوسته مانند $f(x,y)=C$ چنان وجود داشته باشد که

$$df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

از طرفی طبق قاعده مشتق ضمنی تابع $f(x,y)$ داریم:

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

با مقایسه ایندو داریم $M=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $N=\dfrac{\partial f}{\partial y}$. همچنین از آنجا که برای تابعی با مشتقات پیوسته همواره $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ است، می توان شرط کامل بودن را بصورت

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

نوشت که شرط لازم برای کامل بودن معادلهٔ (۱) است. بلعکس، اگر $M(x,y)$ و $N(x,y)$ و مشتقات جزئی اول آنها در ناحیه ای مثل D از صفحهٔ xy پیوسته باشند، با فرض $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ چنین f پیوسته ای وجود دارد: فرض کنید $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه ای در دامنهٔ جواب D است[۲]، بنابر $M=\frac{\partial f}{\partial x}$ داریم:

$$\begin{aligned} f &= \int_{x_\circ}^{x} M(x,y)dx+g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_\circ}^{x} Mdx+g'(y) \\ &= \int_{x_\circ}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}dx+g'(y) \\ &= \int_{x_\circ}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx+g'(y) \qquad ; \quad (\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}) \\ N(x,y) &= N(x,y)-N(x_\circ,y)+g'(y) \qquad ; \quad (\frac{\partial f}{\partial y}=N) \\ g'(y) &= N(x_\circ,y) \\ g(y) &= \int_{y_\circ}^{y} N(x_\circ,y)dy+C \\ \Longrightarrow f(x,y) &= \int_{x_\circ}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_\circ}^{y} N(x_\circ,y)dy+C \qquad (۲) \end{aligned}$$

که براحتی با مشتقگیری ثابت می شود که این تابع بدست آمده در شرط مذکور صدق می کند. لذا چنین ثابت کردیم:

مطلب ۲.۲ معادلهٔ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=\circ$ کامل است اگر $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. برای حل یک معادلهٔ کامل، از آنجائیکه f و M و N توابعی دو متغیره از x و y هستند، از رابطهٔ $M=\frac{\partial f}{\partial x}$ می نویسیم:

$$f=\int Mdx+g(y) \qquad (۳)$$

که $g(y)$ تابعی فقط بر حسب y است. برای یافتن $g(y)$ چون $N=\frac{\partial f}{\partial y}$ است، از این رابطه $g(y)$ را بدست آورده و بنابراین جواب عمومی $f(x,y)=C$ حاصل می شود. واضح است که این جواب عمومی $f(x,y)=C$ توسط معادله (۲) نیز تعیین می گردد.

مثال ۱۵.۲ بررسی کنید که معادلهٔ دیفرانسیل $(xy+y^۲-۱)dx+(۳x^۲-e^y)dy=\circ$ کامل است یا خیر؟

[۲] دامنهٔ جواب لزوماً باید همبند ساده فرض شود تا مشتقات جزئی به درون انتگرال بروند

حل. ضریب dx را M و ضریب dy را N می گیریم. داریم

$$\begin{cases} xy+y^{۲}-۱=M & , \\ ۳x^{۲}-e^{y}=N & . \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=x+۲y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=۶x$$

که برابر نبوده و معادله کامل نیست.

مثال ۱۶.۲ کامل بودن معادلهٔ $(xe^{xy}-۱)dy+(۲+ye^{xy})dx=۰$ را بررسی کنید.

حل. چون

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= e^{xy}+xye^{xy} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^{xy}+xye^{xy} \end{aligned}$$

و معادله کامل است.

مثال ۱۷.۲ حل معادلهٔ $(۲xy)dx+(x^{۲}+۱)dy=۰$.

حل. می نویسیم

$$\frac{\partial M}{\partial y}=۲x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=۲x$$

بنابراین معادله کامل است. طبق مطلب ۲.۲ چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x,y)=\int M\,dx+g(y) \quad &\Rightarrow \quad f=\int(۲xy)dx+g(y) \\ &\Rightarrow \quad f=x^{۲}y+g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}=N \quad &\Rightarrow \quad x^{۲}+g'(y)=x^{۲}+۱ \\ &\Rightarrow \quad g'(y)=۱ \\ &\Rightarrow \quad g(y)=y+C \end{aligned}$$

و $f(x,y)=x^{۲}y+y+C=۰$ تابع مورد نظر بوده، حل تمام است.

مثال ۱۸.۲ مطلوبست حل معادلهٔ دیفرانسیل $(۲xy+e^{y})dx+(x^{۲}+xe^{y})dy=۰$.

حل. می نویسیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= ۲x+e^{y} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= ۲x+e^{y} \end{aligned}$$

پس معادله کامل است:

$$\begin{aligned}
f(x,y)=\int M\ dx+g(y) &\Rightarrow\quad f=\int(۲xy+e^{y})dx+g(y)\\
&\Rightarrow\quad f=x^{۲}y+e^{y}x+g(y)\\
\frac{\partial f}{\partial y}=N &\Rightarrow\quad x^{۲}+e^{y}x+g'(y)=x^{۲}+xe^{y}\\
&\Rightarrow\quad g'(y)=۰\\
&\Rightarrow\quad g(y)=C\\
&\Rightarrow\quad f(x,y)=x^{۲}y+e^{y}x+C=۰
\end{aligned}$$

مطلب ۳.۲ روش حل بیان شده در مطلب ۲.۲ را، در مواردی که انتگرال N آسانتر محاسبه می شود می توان بصورت زیر چنان انجام داد که چون $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ می توان مقدار f را از رابطهٔ

$$f=\int Ndy+h(x) \tag{۴}$$

محاسبه نمود که $h(x)$ تابعی صرفاً بر حسب x است. سپس از $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ مقدار $h(x)$ را بدست آورده و $f(x,y)=C$ را می یابیم. ذکر این گفته ضروری است که در هر دو روش (۳) و (۴) برای بدست آوردن توابع $g(y)$ و $h(x)$ لزوماً باید این توابع تک متغیره باشند وگرنه یا معادله کامل نبوده و یا در محاسبات دچار اشکال شده‌ایم.

تمرین ۴.۲ معادلات دیفرانسیل زیر را با روش معادله کامل حل کنید.

$(a)\ \ ydx+xdy=۰$, $(b)\ \ (۳x^{۲}-y)dx+(۳y^{۲}-x)dy=۰$

$(c)\ \ (۲xy-۲y)dx+(x^{۲}-۲x)dy=۰$, $(d)\ \ \sin ydx+(x\cos y+۱)dy=۰$

$(e)\ \ (ye^{xy}+۲)dx+(xe^{xy}-۲y)dy=۰$, $(f)\ \ (۱+r\cos\theta)d\theta+\sin\theta dr=۰$

تمرین ۵.۲ معادلهٔ دیفرانسیل مثال ۱۶.۲ را حل کنید.

۱.۴.۲ عامل انتگرالساز

همیشه چنین نیست که معادله به شکل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$ کامل باشد. اما در پاره ای حالات می توان آن را به معادله کامل تبدیل کرد. اگر معادله ای کامل نباشد، می توان با ضرب آن در **عامل انتگرالساز**، آنرا به معادله‌ای کامل تبدیل نمود. تابع $I(x,y)$ یک عامل انتگرالساز برای $Mdx+Ndy=۰$ است اگر $I(Mdx+Ndy)=۰$ کامل باشد.

برای مثال $\frac{-1}{x^2}$ عامل انتگرالساز برای معادلهٔ غیرکامل $ydx-xdy=0$ است زیرا با ضرب عامل در معادله داریم $\frac{-1}{x^2}ydx-\frac{-1}{x^2}xdy=0$ و یا $\frac{-y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy=0$ که یک معادلهٔ کامل است. البته $\frac{-1}{x^2}$ تنها عامل انتگرالساز نبوده و در حقیقت هر معادله دارای بیشمار عامل انتگرالساز است.

حال فرض کنید تابع $I(x,y)$ یک عامل انتگرالساز برای معادلهٔ غیرکامل $Mdx+Ndy=0$ بوده و $IMdx+INdy=0$ معادله‌ای کامل است بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial(IM)}{\partial y} &= \frac{\partial(IN)}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y}M+I\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial I}{\partial x}N+I\frac{\partial N}{\partial x} \\ I(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}) &= \frac{\partial I}{\partial x}N-\frac{\partial I}{\partial y}M \qquad (5) \end{aligned}$$

واضح است که حالات مختلفی را می توان از این رابطه برحسب M و N استخراج کرد. سه حالت خاص را مدنظر قرار می دهیم:

(الف) I تنها تابعی از x است، پس $\frac{\partial I}{\partial y}=0$ و رابطهٔ (۵) بصورت $\frac{\partial I}{I}=p(x)dx$ خواهد بود که

$$p(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

و در نتیجه تابع $I=e^{\int p(x)dx}$ عامل انتگرالساز است.

(ب) I تنها تابعی از y است $\frac{\partial I}{\partial x}=0$ و رابطهٔ (۵) بشکل $\frac{\partial I}{I}=p(y)dy$ در می آید که

$$p(y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

و در این حالت نیز تابع $I=e^{\int p(y)dy}$ عامل انتگرالساز می باشد.

بنابراین در مواقعی که معادله کامل نیست و $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ حاصل عبارت $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ را بدست می آوریم و یکی از دو مقدار $p=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ یا $p=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ را محاسبه می کنیم. اگر این مقدار تابعی از x بود، عامل انتگرالساز $I=e^{\int p\ dx}$ و اگر این مقدار تابعی از y باشد، عامل انتگرالساز $I=e^{\int p\ dy}$ خواهد بود.

(ج) با فرض اینکه $z=xy$، در معادلهٔ $Mdx+Ndy=0$ که $M=y.g(z)$ و $N=x.h(z)$ سپس اگر

$$p(z)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{z(h-g)}$$

تابعی از z باشد، تابع $I = e^{\int p(z)dz}$ عامل انتگرالساز معادله است.

مثال ۱۹.۲ مطلوبست حل معادلهٔ $(x^{۲} + y^{۲} + x)dx + y\ dy = ۰$.

حل. چون

$$\frac{\partial M}{\partial y} = ۲y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = ۰$$

پس معادله کامل نیست. برای محاسبهٔ عامل انتگرالساز از آنجائیکه مقدار

$$p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{۲y - ۰}{y} = ۲$$

تابعی ثابت است از y است، حاصل $I = e^{\int p\ dx} = e^{\int ۲dx} = e^{۲x}$ عامل انتگرالساز بوده و با ضرب آن در طرفین معادله داریم:

$$e^{۲x}(x^{۲} + y^{۲} + x)dx + (ye^{۲x})dy = ۰$$

شرایط کامل بودن را مجدداً بررسی می کنیم:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{۲x}۲y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = ۲ye^{۲x}$$

بنابراین معادله کامل است:

$$\begin{aligned}
f = \int N\ dy + g(x) \quad &\Rightarrow \quad f = \int (ye^{۲x})dy + g(x) \\
&\Rightarrow \quad f = \frac{۱}{۲}e^{۲x}y^{۲} + g(x) \\
\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad &\Rightarrow \quad e^{۲x}y^{۲} + g'(x) = e^{۲x}(x^{۲} + y^{۲} + x) \\
&\Rightarrow \quad g'(x) = e^{۲x}(x^{۲} + x) \\
&\Rightarrow \quad g(x) = x^{۲}e^{۲x} + C \\
&\Rightarrow \quad f(x,y) = x^{۲}e^{۲x} + y^{۲}e^{۲x} + C = ۰
\end{aligned}$$

و حل تمام است.

مثال ۲۰.۲ مطلوبست حل معادله $y' + ۲xy = y$.

حل. در این معادله که $(۲xy - y)dx + dy = ۰$ می بینیم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = ۲x - ۱ \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = ۰$$

پس معادله کامل نیست. برای محاسبهٔ عامل انتگرالساز و تبدیل آن به معادله کامل داریم:

$$p=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{۲x-۱}{-y(۲x-۱)}=\frac{-۱}{y}$$

یعنی $I=e^{\int\frac{-۱}{y}dy}=\frac{۱}{y}$ عامل انتگرالساز بوده و با ضرب آن در طرفین معادله

$$(۲x-۱)dx+\frac{۱}{y}dy=۰$$

پس از بررسی شرایط کامل بودن، بوضوح معادله تفکیک پذیر است لذا

$$\begin{aligned}\int(۲x-۱)dx+\int\frac{۱}{y}dy &= C\\ x^۲-x+ln|y| &= C\\ y &= ke^{-x^۲+x}\end{aligned}$$

جواب عمومی معادله است.

مثال ۲۱.۲ حل معادله $(۳xy+y^۲)+(x^۲+xy)y'=۰$

حل. با نوشتن معادله بشکل $(۳xy+y^۲)dx+(x^۲+xy)dy=۰$ و بررسی شرط معادله کامل

$$\frac{\partial M}{\partial y}=۳x+۲y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=۲x+y$$

پس معادله کامل نیست. برای محاسبهٔ عامل انتگرالساز و تبدیل آن به معادله کامل داریم:

$$p=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{x+y}{x^۲+xy}=\frac{۱}{x}$$

و $I=e^{\int\frac{۱}{x}dx}=e^{lnx}=x$ عامل انتگرالساز بوده که با ضرب آن در طرفین معادله

$$(۳x^۲y+xy^۲)dx+(x^۳+x^۲y)dy=۰$$

بدست می آید. با بررسی شرط معادله کامل، آنرا بروش کامل حل می کنیم که جواب عمومی تابع ضمنی

$$x^۳y+\frac{۱}{۲}x^۲y^۲=C$$

خواهد بود.

مثال ۲۲.۲ حل معادلهٔ $y(1-x^2y^2)dx+xdy=0$

حل. طبق مورد (ج) ذکرشده در فوق با فرض $z=xy$ داریم $M=y.g(z)$ و $N=x.h(z)$ که $g=1-z^2$ و $h=1$ و از طرفی دیگر

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-z^2+1-2z^2-1=-3z^2\Rightarrow p(z)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{z(h-g)}=\frac{-3z^2}{z(1-1+z^2)}=\frac{-3}{z}$$

که تابعی از z بوده و تابع $I=e^{\int p(z)dz}=e^{\int -\frac{3}{z}dz}=\frac{1}{z^3}=\frac{1}{x^3y^3}$ عامل انتگرالساز معادله است. با ضرب عامل انتگرالساز I در معادله چنین حاصل می شود:

$$(\frac{1}{x^3y^2}-\frac{1}{x})dx+\frac{1}{x^2y^3}dy=0$$

و معادله با شرط $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-2}{x^3y^3}$ کامل شده پس

$$\begin{aligned}
f(x,y)=\int M\ dx+g(y) &\Rightarrow\quad f(x)=\frac{-1}{2x^2y^2}-lnx+g(y)\\
\frac{\partial f}{\partial y}=N &\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2y^3}-0+g'(y)=\frac{1}{x^2y^3}\\
&\Rightarrow\quad g'(y)=0\\
&\Rightarrow\quad g(y)=C\\
&\Rightarrow\quad f(x,y)=\frac{-1}{2x^2y^2}-lnx=C
\end{aligned}$$

مثال بعدی را بگونه ای متفاوت با روش فوق حل خواهیم نمود. در اینجا مستقیماً باضرب معادله در تابعی مجهول و این فرض که معادله کامل خواهد شد عامل را بدست می آوریم:

مثال ۲۳.۲ حل معادلهٔ $(6ydx-4xdy)+x^2y^3(15ydx+3xdy)=0$

حل. با ضرب این معادله در عامل $x^\alpha y^\beta$ می نویسیم:

$$(6x^\alpha y^{\beta+1}dx-4x^{\alpha+1}y^\beta dy)+(15x^{\alpha+2}y^{\beta+4}dx+3x^{\alpha+3}y^{\beta+3}dy)=0$$

با فرض اینکه عبارت، دیفرانسیل کامل یک تابع است، مطابق توانهای موجود بایستی داشته باشیم:

$$d(x^{\alpha+1}y^{\beta+1})=(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1}dx+(\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta dy$$
$$d(x^{\alpha+3}y^{\beta+4})=(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+4}dx+(\beta+4)x^{\alpha+3}y^{\beta+3}dy$$

با تشکیل تشابهات بین پرانتزها و دیفرانسیل ها می بایست

$$\frac{\alpha+1}{6}=\frac{\beta+1}{-4}\quad;\quad\frac{\alpha+3}{15}=\frac{\beta+4}{3}\qquad\Rightarrow\qquad\alpha=2\ ,\ \beta=-3$$

و جواب عبارتست از $2x^3y^{-2}+x^5y=C$.

تمرین ۶.۲ .

۱) معادلات دیفرانسیل زیر را با یافتن عامل انتگرالساز حل کنید.

$$(a)\ \ xdy - ydx = 0 \qquad , \quad (b)\ \ 2x\sin 3ydx + 3x\cos 3ydy = 0$$

$$(c)\ \ (3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0 \quad , \quad (d)\ \ y(e^x - 1)dx + (e^x + 1)dy = 0$$

$$(e)\ \ (x + 2y)dx + (x + 2y + 1)dy = 0 \qquad , \quad (f)\ \ (y + 2e^x)dx + dy = 0$$

۲) اگر I و J دو عامل انتگرالساز برای معادلهٔ دیفرانسیل غیرکامل $Mdx+Ndy = 0$ باشند، نشان دهید $I + kJ$ برای هر ثابت k عامل انتگرالساز معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود.

۲.۴.۲ عامل دیفرانسیل ساز

استفاده از دیفرانسیل برخی از عبارات باعث سهولت در یافتن جواب بعضی از معادلات می گردد. برای مثال از آنجائیکه $xdy + ydx = d(xy)$ است، با داشتن عبارت $xdy + ydx$ و جایگذاری $d(xy)$ بجای آن براحتی عبارت قابل انتگرالگیری است. به مثال زیر توجه نمائید:

مثال ۲۴.۲ حل معادلهٔ $(y - x^2)dx + xdy = 0$.

حل. می نویسیم $ydx + xdy = x^2dx$ و از آنجائیکه $d(xy) = xdy + ydx$ عبارت دیفرانسیلی کاملیست، بنابراین

$$\begin{aligned}
ydx + xdy &= x^2dx \\
d(xy) &= x^2dx \\
\int d(xy) &= \int x^2dx + C \qquad ; \quad (\int du = u) \\
xy &= \frac{1}{3}x^3 + C \\
y &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

بعضی از عبارات بصورت ترکیبی از چند عبارت است. مثلاً چون

$$\frac{xdy - ydx}{xy} = d(\ln|\frac{y}{x}|)$$

بنابراین عبارت $xdy - ydx$ در صورت، نیاز به عامل xy در مخرج دارد تا به عبارت کامل دیفرانسیلی مبدل شود. در اینگونه موارد با یافتن بهترین عامل دیفرانسیل ساز می توان معادله را به ساده ترین شکل حل نمود. کاربردی ترین عبارات دارای دیفرانسیل کامل در جدول ذیل آمده است:

	عبارت	عامل ضربی	دیفرانسیل ایجاد شده
۱	$ydx+xdy$	$-$	$xdy+ydx=d(xy)$
۲	$ydx-xdy$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d(\frac{y}{x})$
۳	$ydx-xdy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d(\frac{x}{y})$
۴	$ydx-xdy$	$\frac{-1}{xy}$	$\frac{xdy-ydx}{xy}=d(\ln\|\frac{y}{x}\|)$
۵	$ydx-xdy$	$\frac{-1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d(arctg\frac{y}{x})$
٦	$ydx+xdy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{ydx+xdy}{xy}=d(\ln\|xy\|)$
۷	$ydx+xdy$	$\frac{1}{(xy)^n}\ ,\ (n>1)$	$\frac{ydx+xdy}{(xy)^n}=d(\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}})$
۸	$ydy+xdx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{ydy+xdx}{x^2+y^2}=d(\frac{1}{2}ln(x^2+y^2))$
۹	$ydy+xdx$	$\frac{1}{(x^2+y^2)^n}\ ,\ (n>1)$	$\frac{ydy+xdx}{(x^2+y^2)^n}=d(\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}})$
۱۰	$aydx+bxdy$	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(aydx+bxdy)=d(x^ay^b)$

آنگونه در این جدول می بینید بر حسب عبارت موجود می بایست عامل دیفرانسیل ساز را در معادله ضرب نمود تا عبارت کامل دیفرانسیلی پدید آید. به مثالهای ذیل توجه نمائید:

مثال ۲۵.۲ مطلوبست حل معادلهٔ $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x^5y^2-1)}{x}$.

حل.

$$\begin{aligned} ydx+xdy &= x^5y^3dx \\ \frac{ydx+xdy}{x^3y^3} &= x^2dx \\ \int d(\frac{-1}{2x^2y^2}) &= \int x^2dx+C \qquad \text{فرمول شماره ۷ جدول} \\ \frac{-1}{2x^2y^2} &= \frac{x^3}{3}+C \\ &\Rightarrow 2x^5y^2+6Cx^2y^2+3=0 \end{aligned}$$

مثال ۲٦.۲ حل معادلهٔ $ty'=5t^3-2y$

حل. پس از ساده کردن معادله بصورت $2ydt+tdy=5t^3dt$ از مقایسهٔ طرف چپ با فرمول شمارهٔ (۱۰) جدول، دیده می شود که می بایست $a=2$ و $b=1$ بوده و بنابراین عامل ضربی

$$t^{2-1}y^{1-1}=t$$

خواهد بود. با ضرب طرفین معادله در t داریم $2tydt+t^2dy=5t^4dy$ یا $d(t^2y)=d(t^5)$ و جواب معادله پس از ساده نمودن آن $y=t^3+Ct^{-2}$ است.

تمرین ۷.۲ .

$$(a)\quad (y-2xy^2)dx - xdy = 0 \qquad , \qquad (b)\quad y(1+x^4y)dx + xdy = 0$$

$$(c)\quad (2+ye^{xy})dx + (xe^{xy}-2)dy = 0 \quad , \quad (d)\quad (2y - xe^{xy})y' = 2 + ye^{xy}$$

۵.۲ معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

معادلهٔ خطی مرتبه اول بصورت

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{6}$$

است که $p(x)$ و $q(x)$ توابعی از x هستند. اگر $p=0$ معادله بشکل $y'=q(x)$ در می آید که توسط انتگرال معمولی $y=\int q(x)dx + C$ جواب حاصل می شود. اگر $q=0$ معادله بصورت $y'=-p(x)y$ در می آید که تفکیک پذیر بوده و حاصل آن $y=e^{\int -p(x)dx}+C$ خواهد بود. در حالت کلی که $p,q\neq 0$ است، معادلهٔ (۶) شکل

$$(py-q)dx + dy = 0$$

را بخود می گیرد و از آنجاکه $\frac{\partial M}{\partial y} = p$ و $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ پس (۶) معادله ای غیر کامل است و جهت حل دو روش ذیل پیشنهاد می شود. دقت نمائید که این معادله می بایست لزوماً مرتبه اول و قابل تبدیل به درجهٔ اول باشد و مثلاً معادلهٔ $(y')^3 + 3xy = e^x$ قابل حل با این روشها نیست.

۱.۵.۲ حل بروش عامل انتگرالساز

اگر I عامل انتگرالساز برای طرف چپ معادلهٔ (۶) باشد یعنی $Iy' + Ipy = Iq$ برای اینکه طرف چپ معادله‌ای کامل باشد بایستی $Iy' + Ipy = (Iy)'$ و در نتیجه

$$\begin{cases} Ipy = I'y & , \\ (Iy)' = Iq & . \end{cases}$$

که دو فرمول زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} I(x) = e^{\int p(x)dx} & , \qquad (7) \\ Iy = \int Iq(x)dx + C & . \qquad (8). \end{cases}$$

و (۷) همان مقدار **عامل انتگرالساز** خواهد بود. این فرمول تضمین می کند که اگر طرفین (٦) را در آن ضرب کنیم طرف چپ حتماً دارای دیفرانسیل کامل خواهد شد. سپس از (۸) نتیجه حاصل می شود.

مثال ۲۷.۲ حل معادلهٔ $y' - ۳y = ٦$

حل. با داشتن $p = -۳$ عامل انتگرالساز برابر است با

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -۳dx} = e^{-۳x}$$

با جایگذاری در (۸) داریم

$$ye^{-۳x} = \int ٦e^{-۳x}dx + C$$

و جواب عمومی $y = -۲ + Ce^{-۳x}$ خواهد بود.

مثال ۲۸.۲ مطلوبست حل معادلهٔ

$$\frac{dv}{dx} - \frac{۴}{x}v = ۲$$

حل. چون معادله خطی مرتبه اول است که $p = -\frac{۴}{x}$ و $q = ۲$ طبق (۷) می نویسیم:

$$\begin{aligned} I(x) &= e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{۴}{x}dx} = e^{-۴lnx} = \frac{۱}{x^۴} \\ Iv &= \int Iq(x)dx + C \qquad \text{طبق (۸)} \\ \frac{۱}{x^۴}v &= \int \frac{۱}{x^۴}۲dx + C \\ v &= x^۴(-\frac{۲}{۳x^۳} + C) \\ v &= -\frac{۲}{۳}x + Cx^۴ \end{aligned}$$

۲.۵.۲ حل بروش تغییر پارامتر

هرچند این روش ایده ای کاملاً زیباست ولی نسبت به روش قبلی مقبولیت کمتری دارد. در این روش با فرض $q = ۰$ معادلهٔ $y' + p(x)y = ۰$ را حل کرده و جواب عمومی را بصورت

$$y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

بدست می آوریم. اکنون پارامتر C را برابر تابع متغیری مانند u فرض نموده و با مشتقگیری و جایگذاری در (٦) مقدار تابع u را حساب می کنیم.

مثال ۲۹.۲ مطلوبست حل معادلهٔ مثال ۲۸.۲ با روش تغییر پارامتر

حل.

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx}-\frac{۴}{x}v &= ۰\\
\frac{dv}{v} &= \frac{۴}{x}dx\\
v &= Cx^{۴}\\
v &= ux^{۴} \quad \text{تغییر پارامتر}\\
v' &= u'.x^{۴}+۴x^{۳}.u = u'x^{۴}+\frac{۴}{x}v\\
v'-\frac{۴}{x}v &= u'x^{۴}\\
۲ &= u'x^{۴}\\
u &= -\frac{۲}{۳x^{۳}}+k\\
v &= -\frac{۲}{۳}x+kx^{۴}
\end{aligned}$$

تمرین ۸.۲ .

۱) معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llcll}
(a) & y'+۴y=۰ & , & (b) & t\dfrac{dy}{dt}-۲y=t^{۳}\cos ۴t\\
(c) & \dfrac{dy}{dt}+\dfrac{۵}{t}y=۰ & , & (d) & y'+y=\sin x\\
(e) & (e^{x}-۱)y'+e^{x}y=۰ & , & (f) & v'+\dfrac{۱}{t}v=۲\cos ۲t\\
(g) & y'+۲xy=۳x & , & (h) & \dfrac{dv}{dt}+v=۲\sin t\\
(i) & \dfrac{dv}{dt}+vt=-۲t & , & (j) & y'(\sin x\cos^{۳}x)+y\cos ۲x\cos^{۲}x=۱
\end{array}$$

۲) در یک معادلهٔ خطی مرتبه اول به شکل $y'+py=q(x)$ که در آن مقدار p تنها یک ثابت عددی است، می نویسیم:

$$I(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{px}\Rightarrow ye^{px}=\int e^{px}q(x)dx+C\Rightarrow y=e^{-px}\left(\int e^{px}q(x)dx+C\right)$$

که جواب بشکل ساده تری بدست خواهد آمد. با این فرمول ساده شده، معادلات زیر را حل نمائید.

$$(a)\quad y'-۶y=۵ \quad , \quad (b)\quad y'+۲y=۲x^{۳}$$